

بررسی و شبیه سازی LITT در بافت بیولوژیکی با روش المان مرزی دوجانبه ای

محمداحسان صلواتی^۱

محمدحسین میران ییگی^۲

^۱ کارشناس ارشد مهندسی پزشکی، دانشکده مهندسی

برق و کامپیوتر، دانشگاه تربیت مدرس

^۲ دانشیار برق و کامپیوتر، گروه مهندسی پزشکی،

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه تربیت مدرس

نویسنده مسئول: محمداحسان صلواتی، تلفن ۰۹۱۲۱۳۶۵۲۹۳

پست الکترونیک: Me.salavati@modares.ac.ir

خلاصه

مقدمه: گرمادرمانی بینابینی القاء شده توسط لیزر LITT یک روش گرمادرمانی به صورت حداقل تهاجمی برای درمان تومورهای سرطانی است. مدل کردن اثر لیزر بر بافت در LITT نسبت به روش های نظارت بر افزایش دما مزیت های زیادی دارد از جمله بررسی انتشار نور و انتقال گرما، تغییر پارامترهای تأثیرگذار در اثر لیزر بر بافت، هزینه کمتر و به صرفه بودن. از میان روش های گوناگون حل عددی مانند المان محدود و تفاضل محدود، روش المان مرزی دوجانبه ای جدیدترین روش مورد استفاده محققان برای حل مسائل انتقال گرما در بافت است.

روش بررسی: در این تحقیق افزایش دمای بافت کبد با روش المان مرزی دوجانبه ای بررسی شده است. در این مقاله از روش مونت کارلو با گام متغیر و جذب تدریجی برای انتشار نور در بافت استفاده شده و همچنین نتایج حاصل از روش المان مرزی دوجانبه ای با روش المان محدود مقایسه شده است.

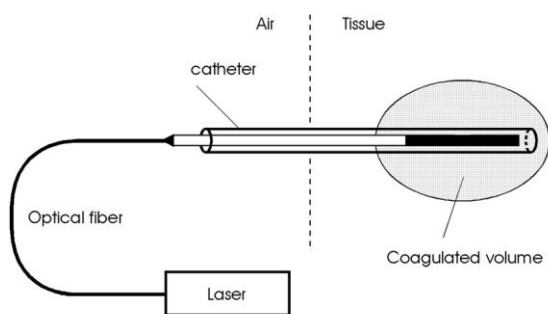
یافته ها: نتایج نشان می دهد که هر دو روش المان مرزی دوجانبه ای و المان محدود به نتایج تقریباً مشابهی می رسند و اختلاف دمای این دو روش ناچیز و کمتر از ۱ درجه سانتی گراد است. همچنین روش المان مرزی به علت کاهش یک واحدی بعد مسئله باعث افزایش سرعت حل می شود.

نتیجه گیری: روش المان مرزی دوجانبه ای روشی دقیق و سریع برای بررسی انتقال گرما در بافت در اثر تابش لیزری می باشد.

واژه های کلیدی: روش المان مرزی دوجانبه ای، LITT، اثر لیزر بر بافت، روش مونت کارلو

مقدمه

امروزه از روش های گوناگونی برای درمان سرطان استفاده می شود. یکی از این روش ها گرمادرمانی بینابینی القاء شده توسط لیزر LITT^۱ می باشد. LITT یک روش درمانی نیمه تهاجمی است که اولین بار استفاده از آن برای تومورهای بدخیم توسط باون در سال ۱۹۸۳ مطرح شد. به علت قابلیت انعطاف فیبرهای نوری و کوچک بودن آنها این عمل با ایجاد سوراخ هایی کوچک در پوست و وارد کردن فیبر در بدن صورت می گیرد. در LITT اعمالگر لیزری درون توده سرطانی قرار می گیرد تا با تابش لیزر و جذب فوتون ها دمای سلول های سرطانی آن قدر افزایش یابد تا از بین بروند [۱-۳]. در شکل ۱ نحوه قرارگیری اعمالگر در بافت سرطانی در LITT نشان داده شده است. نور لیزر توسط کاتتر (سوند) لیزری مناسب به بافت منتقل می شود. نور لیزر را می توان توسط فیبرهای نوری با قطر کمتر از ۵۰۰ میکرومتر از طریق کاتتر به داخل اعمالگر گسیل نمود.



شکل ۱: روش قرارگیری اعمالگر در LITT

اما یکی از مشکلات روش LITT پیش بینی دقیق میزان آسیب به تومور و بافت مجاور آن است تا از آسیب به بافت سالم جلوگیری شود. این کار مخصوصاً در نواحی حساس مانند مغز و گردن از اهمیت بالایی برخوردار است. روش های گوناگونی برای نظارت بر افزایش دمای ایجاد شده در هنگام عمل پیشنهاد شده است. از جمله این روش ها می توان به استفاده از ترموکوپل ها،

¹ Laser Interstitial Thermo Therapy

توسط ناردینی و بریبا [۱۸] تاکنون از این روش برای حل مسائل مختلف ترموفیزیک استفاده شده است. اما از این روش برای حل مسائل انتقال گرما در بافت بیولوژیکی استفاده کمی شده است. در این مقاله از روش DRBEM برای محاسبه انتقال گرما در LITT با سه مدل مربعی، دایروی و بیضوی در دو بُعد استفاده و نتایج آن با نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌های مشابه با روش المان محدود مقایسه شده است. برای شبیه‌سازی انتشار نور در بافت از روش مونت کارلو در هر دو روش المان مرزی و المان محدود استفاده شده است که در ادامه مطالب به ترتیب شرح داده می‌شوند.

در این مقاله از لیزر نئودیمیم‌یاق در طول موج ۱۰۶۴ نانومتر برای استفاده در شبیه‌سازی LITT استفاده شده است. علت استفاده از این لیزر، عمق نفوذ بالاتر آن نسبت به لیزرهای دیگر مانند دیود لیزرها با طول موج‌های ۸۰۰ تا ۹۵۰ نانومتر است. افزایش دما با استفاده از معادله گرمایی پنس^۶ با روش المان مرزی محاسبه گردیده است. برای شبیه‌سازی انتشار نور و انتقال گرما در بافت از سه مدل مربعی با ضلع ۳ سانتی‌متر، دایروی با قطر ۳ سانتی‌متر و بیضوی با قطرهای ۲ و ۴ سانتی‌متر استفاده شده است.

مراحل انجام کار

روش مونت کارلو

انتشار نور و حرکت فوتون‌ها در بافت بیولوژیکی خیلی پیچیده‌تر از مواد جامد است. در بافت بیولوژیکی، نور هم جذب و هم پراکنده می‌شود. پراکندگی در طول موج‌های مادون قرمز و نزدیک به مادون قرمز بر جذب غالب است. این امر باعث می‌شود که یک پنجره درمانی برای نفوذ نور به درون بافت ایجاد شود [۱۲]. در این مقاله برای انتشار نور در بافت از روش مونت کارلو استفاده شده است. روش مونت کارلو یک روش حل عددی است که در این روش برای تعداد رندوم N فوتون در محیط شبیه‌سازی کامپیوتری صورت می‌گیرد. تاکنون الگوریتم‌های متعددی برای مونت کارلو پیشنهاد شده است. الگوریتم‌ها با توجه به گام حرکت به دو نوع ثابت و متغیر تقسیم می‌شوند. گام متغیر می‌تواند به دوروش جذب لحظه‌ای و جذب تدریجی تقسیم شود [۱۹ و ۲۰]. در این مقاله از روش مونت کارلو با گام حرکتی متغیر و جذب تدریجی استفاده شده است که توضیح کامل آن در [۲۳-۱۹] آورده شده است.

فیبرهای نوری گرمایی، اولتراسوند، سونوگرافی رنگی داپلر، تصویربرداری اشعه ایکس و MRI اشاره کرد. ترموکوپل‌ها و فیبرهای نوری گرمایی فقط در چند نقطه گسسته امکان نمایش دادن دما را دارند و به علاوه به علت تهاجمی بودن باعث رنجش بیمار می‌شوند. اولتراسوند نیز روش دیگری است که مورد استفاده قرار می‌گیرد اما از دقت پایینی برخوردار است. تصویربرداری با اشعه ایکس هم محدودیت رزولوشن دمایی دارد [۴ و ۵]. MRI رزولوشن گرمایی بالایی دارد اما این روش هزینه زیادی دارد و با جابه‌جایی بیمار دچار خطا می‌شود [۹-۵].

به علت معیبهی که هریک از روش‌های بالا برای نظارت بر افزایش دما در بافت دارند، شبیه‌سازی‌های کامپیوتری می‌توانند روشی مناسب و به صرفه برای بهینه‌سازی شرایط درمانی و پیش‌بینی آسیب ایجاد شده باشند و به علاوه به فهم چگونگی انتشار نور و گرما در بافت کمک کنند. به کمک شبیه‌سازی‌های کامپیوتری می‌توان پارامترهای زیادی را از جمله نوع لیزر، زمان تابش، توان لیزر و ... تغییر داد و اثرهای آن‌ها را بررسی کرد. از روش‌های گوناگونی برای محاسبه انتقال گرما در بافت بر اثر تابش لیزر استفاده می‌شود. روش‌های حل تحلیلی به علت پیچیدگی، محدود به مدل‌های ساده هستند. روش المان مرزی^۲ (BEM) جدیدترین روش حل عددی برای شبیه‌سازی انتقال گرما به بافت است. روش المان مرزی روشی است که امروزه خیلی مورد توجه محققان قرار گرفته است. مزیت اصلی BEM نسبت به روش‌های حل عددی دیگر مانند المان محدود^۳ (FEM) و تفاضل محدود^۴ (FDM) این است که حل کامل مسئله در مرزها صورت می‌گیرد که به طور قابل توجهی محاسبات را کم می‌کند و باعث کاهش یک‌واحدی بُعد مسئله می‌شود. برخلاف FEM و FDM که مسئله روی کل ناحیه حل می‌شود، گسستگی‌ها در BEM به مرزها محدود شده است و تولید داده و ایجاد حالات برای حل مسائل را بسیار ساده‌تر می‌کند. از این رو این روش بسیار سریع‌تر از روش‌های حل عددی دیگر می‌باشد و طبق تحقیقات صورت گرفته دقت بالاتری نسبت به روش‌های دیگر دارد [۱۶-۱۰].

با این حال یکی از مشکلات روش المان مرزی معمولی این است که در مسائل غیر همگن، غیر خطی و یا وابسته به زمان، امکان استفاده از این روش وجود ندارد. یکی از روش‌هایی که برای غلبه بر این مشکل پیشنهاد شده است، استفاده از روش المان مرزی دو جانبه‌ای^۵ (DRBEM) است [۱۷]. از ابتدای معرفی DRBEM

² Boundary Element Method

³ Finite Element Method

⁴ Finite Difference Method

⁵ Dual Reciprocity Boundary Element Method

⁶ Pennes

با فرض اینکه:

$$u = T \quad , \quad u_a = T_a$$

$$W_B = \frac{\omega_b \rho_b c_b u_a}{k} \quad (4)$$

$$D = \frac{\omega_b \rho_b c_b u_a}{k} \quad , \quad \tau = t$$

معادله گرمایی را می توان به صورت رابطه زیر نوشت [۱۲]:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial u}{\partial t} + W_B \cdot u + D + Q_m + S \quad (5)$$

اگر سمت راست رابطه بالا را به طور کلی برابر با b بگیریم به معادله پواسون به صورت زیر می رسیم:

$$\nabla^2 u = b \quad (6)$$

همان طور که مشخص است، b تابعی از زمان و مکان است و به همین دلیل از روش حل المان مرزی دوجانبه ای استفاده می کنیم. حل رابطه (۶) ترکیبی از حل معادله لاپلاس و حل ویژه به صورت زیر می باشد:

$$u = \hat{u} + \tilde{u} \quad (7)$$

\tilde{u} حل برای معادله همگن لاپلاس است و \hat{u} حل ویژه برای معادله پواسون است و به صورت $\nabla^2 \hat{u} = b$ می باشد. به طور کلی پیدا کردن \hat{u} ای که در معادله بالا صدق کند بخصوص در مسائل غیر خطی و وابسته به زمان، کار سختی است. در المان مرزی دوجانبه ای به علت اینکه تابع، خطی نیست یا وابسته به زمان است، لازم است نودهای درون ناحیه هم در نظر گرفته شوند. در این روش از یک سری حل های ویژه \hat{u}_j به جای \hat{u} استفاده می شود. تعداد حل های خاص \hat{u}_j با تعداد نودهای مورد استفاده برابر است. اگر فرض کنیم که N نود مرزی و L نود درون بافت داریم، تعداد $N+L$ مقدار برای \hat{u}_j خواهیم داشت [۱۸]. در شکل ۲، N نود مرزی و L نود درون بافت نشان داده شده است. برای حل تقریبی برای مقدار b به صورت زیر پیشنهاد می شود [۱۸-۳۰ و ۲۴]:

$$b \cong \sum_{j=1}^{N+L} a_j f_j \quad (8)$$

در پایان شبیه سازی مونت کارلو ماتریس جذبی به دست می آید که میزان جذب فوتون ها را در بافت نشان می دهد. این ماتریس با تقسیم شدن بر المان های حجمی مورد نظر و تعداد فوتون های مورد استفاده به صورت ماتریس چگالی حجمی جذب در بافت در می آید. با ضرب در توان لیزر، این ماتریس به ماتریس حجمی توان لیزر در بافت تبدیل می شود. در مدل های دوبعدی از رابطه زیر برای محاسبه چگالی توان لیزر در هر المان استفاده می شود [۱۹]:

$$S_{i,j} = \frac{A(r,z)_{i,j}}{P \times \frac{N \cdot 2\pi \cdot (1-0.5)(dr)^2 \cdot dz}{2}} \quad (1)$$

در رابطه فوق $S_{i,j}$ چگالی توان لیزر در المان (i,j) ، $A(r,z)$ ماتریس جذب خام دوبعدی و dr و dz ابعاد شعاع و ارتفاع المان حجمی در دوبعد می باشند که $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

انتقال گرما در بافت

هدف از تابش لیزر در LITT ایجاد گرما برای از بین بردن سلول های سرطانی است. معادله پنس به علت سادگی و کارآمدی با در نظر گرفتن گردش خون و گرمای ناشی از متابولیسم بدن، مقبول ترین معادله برای مدل کردن انتقال گرما در بافت است. معادله پنس به صورت زیر می باشد [۲۴-۲۶ و ۵،۴]:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \omega_b \rho_b c_b (T_a - T) + Q_M + S \quad (2)$$

در این معادله T درجه حرارت، ρ چگالی بافت $[kg.cm^{-3}]$ ، c گرمای مخصوص بافت $[J.kg^{-1} \cdot ^\circ C^{-1}]$ ، k هدایت گرمایی بافت $[W.cm^{-1} \cdot ^\circ C^{-1}]$ ، t زمان $[s]$ ، T_a دمای خون $[^\circ C]$ ، ρ_b چگالی خون، c_b گرمای مخصوص خون، Q_M گرمای ایجاد شده به علت متابولیسم بدن $[W.cm^{-3}]$ ، S مقدار گرمای تولید شده بر اثر جذب فوتون لیزر $[W.cm^{-3}]$ و ω_b نرخ حجمی گردش خون $[s^{-1}]$ است. در معادله بالا S از ضرب توان لیزر در ماتریس جذب به دست آمده از روش مونت کارلو حاصل می شود.

روش المان مرزی

معادله پنس برای یک مدل دوبعدی در مختصات کارتزین را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \omega_b \rho_b c_b (T_a - T) + Q_M + S \quad (3)$$

انتگرال‌ها روی مرزها می‌باشند و انتگرال روی ناحیه وجود ندارد. با گسسته‌سازی به روش المان مرزی معمولی برای $N+L$ نود مرزی و درونی، معادله (۱۱) به صورت زیر درمی‌آید:

$$c_i u_i + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} q^* u d\Gamma - \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} u^* q d\Gamma = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left(c_j \hat{u}_{ij} + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} q^* \hat{u}_{ij} d\Gamma - \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} u^* \hat{q}_{ij} d\Gamma \right) \quad (12)$$

بر این اساس دو نوع انتگرال روی هر المان باید محاسبه شود:

$$\int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma \quad , \quad \int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma \quad (13)$$

این انتگرال‌ها با توجه به دو نقطه i و j که حل بنیادی روی آن صورت می‌گیرد، محاسبه می‌شوند. برای محاسبه آن‌ها H_{ij} و G_{ij} را به صورت زیر تعریف می‌کنیم [۱۸-۳۰-۲۴]:

$$G_{ij} = \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma \quad , \quad H_{ij} = \int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma \quad (14)$$

لازم به ذکر است که \hat{u} و \hat{q} هنگامی که f تعریف شود، معلوم هستند و نیاز به تقریب زدن آن‌ها نیست. با استفاده از معادلات (۱۲) و (۱۴) معادله زیر به دست می‌آید [۱۸-۱۰]:

$$c_i u_i + \sum_{k=1}^N H_{ik} u_k - \sum_{k=1}^N G_{ik} q_k = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left(c_j \hat{u}_{ij} + \sum_{k=1}^N H_{ik} \hat{u}_{kj} - \sum_{k=1}^N G_{ik} \hat{q}_{kj} \right) \quad (15)$$

اندیس k برای N نود مرزی و اندیس j برای $N+L$ نود مرزی و داخلی به کار می‌رود. بعد از اعمال روش بالا روی تمامی نقاط مرزی، رابطه (۱۵) به صورت ماتریسی درمی‌آید:

$$Hu - Gq = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j (H\hat{u}_j - G\hat{q}_j) \quad (16)$$

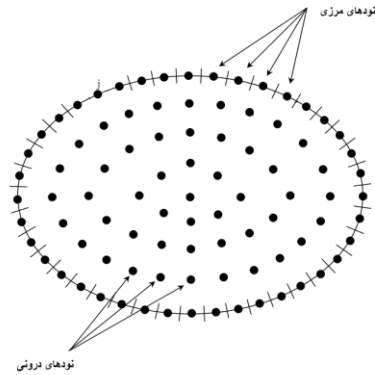
در معادله بالا c_i در قطر ماتریس H تعبیه شده است. اگر هر بردار \hat{u}_j و \hat{q}_j به صورت ستونی از ماتریس \hat{U} و \hat{Q} باشد، رابطه (۱۶) را می‌توان به صورت کاملاً ماتریسی زیر تبدیل کرد:

$$Hu - Gq = (H\hat{U} - G\hat{Q})\alpha \quad (17)$$

معادله بالا اساس روش المان مرزی دوجانبه‌ای است که فقط روی مرزها گسسته‌سازی صورت گرفته است. نقاط داخلی را می‌توان به انتخاب خود کاربر در هر نقطه از درون ناحیه مورد نظر انتخاب کرد. معمولاً این نقاط در جایی که جواب مسئله مورد نیاز است قرار داده می‌شوند و در غیر این صورت می‌توان از کدهای

که ضرایب نامعلومی هستند که باید محاسبه شوند و f_j توابع تقریب می‌باشند که حل‌های ویژه \hat{u}_j به صورت زیر با توابع تقریب f_j رابطه دارند:

$$\nabla^2 \hat{u}_j = f_j \quad (9)$$



شکل ۱: نودهای مرزی و نودهای درون ناحیه مورد نظر

f_j می‌تواند مقادیر مختلفی داشته باشد اما تحقیقات نشان داده است که $f_j = r_j + 1$ به جواب‌های دقیق با خطای کم منجر می‌شود که در آن r_j مقدار فاصله از نقطه نام در ناحیه مورد نظر به هر نقطه‌ای مورد بررسی است [۱۸-۱۰]. با جابه‌جایی (۹) در (۸) رابطه زیر به دست می‌آید:

$$b = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j (\nabla^2 \hat{u}_j) \quad (10)$$

با جابه‌جایی معادله (۱۴) در (۱۰) و با استفاده از حل بنیادی u^* و انتگرال‌گیری جزء به جزء که به تفصیل در [۱۸] شرح داده شده است به معادله انتگرالی روش المان مرزی دوجانبه‌ای می‌رسیم:

$$c_i u_i + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u^* q d\Gamma = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left(c_j \hat{u}_{ij} - \int_{\Gamma} u^* \hat{q}_{ij} d\Gamma + \int_{\Gamma} q^* \hat{u}_{ij} d\Gamma \right) \quad (11)$$

که در آن $c_i = \frac{\theta}{2\pi}$ است و θ زاویه داخلی در نقطه i می‌باشد و مقدار c_i به هندسه مدل بستگی دارد، $q = \frac{du}{dn}$ ، $q^* = \frac{du^*}{dn}$ و $\hat{q} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial n}$ برداریکه خارجی روی مرز Γ است برای معادلات دو بُعدی المان مرزی $u^* = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right)$ و $\hat{u} = \frac{r^2}{4} + \frac{r^3}{9}$ ، $\hat{q} = \left(r_x \frac{\partial x}{\partial n} + r_y \frac{\partial y}{\partial n}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{r}{3}\right)$ می‌باشد [۱۸]. همان‌طور که مشاهده می‌شود در رابطه بالا

⁷ Fundamental Solution

مقادیر معلوم در یک سمت و مقادیر نامعلوم در سمت دیگر با تکنیک‌های خاص حل کرد و از آن‌ها برای گام بعدی حرکت استفاده نمود. بدین ترتیب با تعیین گام‌های زمانی و مشخص کردن تعداد آن‌ها می‌توانیم میزان گرمای ایجاد شده در هر نقطه درونی بافت را در زمانی معین بیابیم.

شبیه سازی

مقادیر مورد استفاده برای خصوصیات نوری و گرمایی بافت کبد [۵ و ۴] در این مقاله در جدول ۱ آورده شده است. روش کار به این صورت می‌باشد که ابتدا برای انتشار نور در بافت از روش مونت کارلو استفاده می‌شود. سپس ماتریس جذبی را که از مونت کارلو به دست می‌آید در توان لیزر مورد نظر ضرب می‌کنیم تا چگالی حجمی توان لیزر در بافت به دست آید. این چگالی حجمی توان لیزر S در معادله (۲) است. در روش مونت کارلو از ۵۰۰۰ فوتون برای شبیه سازی‌ها استفاده شد. افزایش دما در بافت توسط روش عددی المان مرزی محاسبه می‌گردد. برای محاسبه با روش المان مرزی ابتدا نودهایی درون و روی مرز ناحیه مورد نظر مانند شکل ۲ قرار داده می‌شود سپس با استفاده از این نودها و روش گسسته سازی توضیح داده شده در قسمت قبل، ماتریس‌های H, G, \bar{U} و \bar{Q} محاسبه می‌شوند. مقادیر اولیه برای q و u به ترتیب صفر و ۳۷ درجه سانتی گراد در نظر گرفته می‌شوند. با داشتن مقادیر اولیه در هر گام زمانی، مقادیر گام زمانی بعدی محاسبه می‌گردد و از آن برای مقادیر اولیه گام زمانی بعد استفاده می‌شود. بدین ترتیب می‌توان جواب را برای هر زمان مورد نظر پیدا کرد.

جدول ۱: ضرایب نوری و گرمایی بافت [۵ و ۴]

$T[^\circ\text{C}]$	۳۷
$K[\text{W/m.k}]$	۰/۵۷
$\rho[\text{kg/m}^3]$	۱۰۵۰
$C[\text{J/kg.k}]$	۳۵۹۰
n	۱/۳۳
g	۰/۹۱۷
$\mu_s[\text{l/cm}]$	۱۰۹
$\mu_a[\text{l/cm}]$	۰/۳
طول موج	۱۰۶۴ نانومتر

اعمالگر لیزری لیزر نئودیمیم یاق ۱۰۶۴ نانومتری به صورت افقی با طول ۸ میلی متر در وسط بافت قرار می‌گیرد. توان لیزر برای این شبیه سازی ۵ وات و مدت زمان تابش ۶۰ ثانیه در نظر گرفته شده است. در این تحقیق برای شبیه سازی‌ها از نرم افزار MATLAB استفاده شد.

کامپیوتری یا روش مونت کارلو برای انتخاب نقاط داخلی استفاده کرد [۱۸].

با توجه به رابطه (۸) و در نظر گرفتن مقدار b در $N + L$ نقطه می‌توان فرم ماتریسی زیر را برای به دست آوردن α نوشت:

$$b = F\alpha \quad (18)$$

که هر ستون ماتریس F ، مقادیر بردار f_j برای $N + L$ نقطه هستند. با توجه به اینکه مقدار b را می‌دانیم، می‌توان مقدار α را از روش معکوس ماتریس F به دست آورد:

$$\alpha = F^{-1}b \quad (19)$$

با جایگزینی رابطه بالا در (۱۲) رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$Hu - Gq = (H\bar{U} - G\bar{Q})F^{-1}b \quad (20)$$

با توجه به رابطه (۵) بردار b را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$b = \frac{\partial u}{\partial t} + W_s u + D + Q_m + S \quad (21)$$

برای حل این مسائل یک تقریب خطی برای محاسبه تغییرات u و q در هر گام زمانی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۱۰ و ۱۸]:

$$\dot{u} = \frac{1}{\Delta t} (u^{m+1} - u^m) \quad (22)$$

$$u = (1 - \theta_q)u^m + \theta_q u^{m+1}$$

$$q = (1 - \theta_q)q^m + \theta_q q^{m+1}$$

که θ_u و θ_q مقادیر u و q را بین هر دو گام زمانی m و $m + 1$ تعیین می‌کنند. براساس محاسبات انجام شده در [۱۸] می‌توان دقت بالایی را برای مقادیر $\theta_u = 0/5$ و $\theta_q = 1$ در حل مسائل به دست آورد. با جابه جایی (۲۲) در (۲۰) به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\left(\left(\frac{2}{\Delta t} + W_s \right) R + H \right) u^{m+1} - 2Gq^{m+1} = \left[\left(\frac{2}{\Delta t} - W_s \right) R - H \right] u^m - 2R(D + Q_m + S) \quad (23)$$

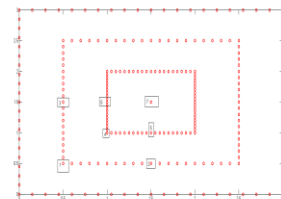
که $R = -(H\bar{U} - G\bar{Q})F^{-1}$ می‌باشد. سمت راست معادله (۲۳) در زمان $(m + 1)\Delta t$ معلوم است. با اعمال حالات مرزی در زمان $(m + 1)\Delta t$ می‌توان معادله بالا را با جابه جایی

یافته‌ها

شبیه‌سازی‌ها با روش المان مرزی دوجانبه‌ای برای سه مدل مربعی، دایروی و بیضوی دوبعدی با خصوصیات بافت سرطانی کبد صورت گرفت. در هر مدل تعدادی نقطه آزمون در نقاط مختلف برای بررسی افزایش دما در بافت در نظر گرفته شد تا افزایش دما در این نقاط بررسی شود. نتایج به دست آمده با نتایج شبیه‌سازی با روش المان محدود مقایسه شدند. برای شبیه‌سازی با روش المان محدود از نرم‌افزار Comsol Multiphysics 3.5 که مخصوص شبیه‌سازی به روش المان محدود است، استفاده گردید [۳۱]. در ادامه، نتایج برای هر یک از این سه مدل بررسی می‌شود.

مدل مربعی

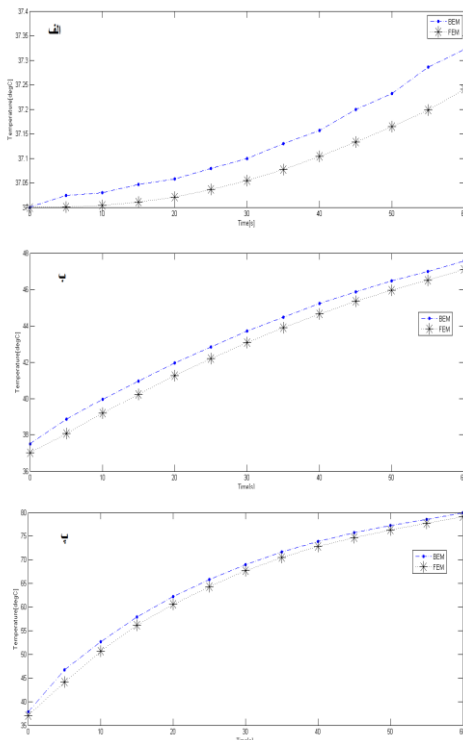
مدل مربعی به صورت مربعی با ضلع ۳ سانتی‌متر در نظر گرفته شده است. اعمالگر لیزر نئودیمیم‌یاق ۱۰۶۴ نانومتری به صورت افقی با طول ۸ میلی‌متر و قطر ۲۰۰ میکرومتر در وسط بافت قرار می‌گیرد به طوری که وسط اعمالگر در نقطه مرکزی بافت می‌باشد. توان لیزر برای این شبیه‌سازی ۵ وات و مدت زمان تابش ۶۰ ثانیه در نظر گرفته شده است. در شکل ۳، نحوه قرارگیری نودها در مرز بافت و درون بافت نمایش داده شده است. تعداد ۷ نقطه آزمون برای بررسی دمای درون بافت در نظر گرفته شده است. این نقاط با شماره آن‌ها در شکل نشان داده شده‌اند. در جدول ۲ نتایج نهایی حاصل از شبیه‌سازی در نقاط آزمون برای دو روش المان مرزی دوجانبه‌ای و المان محدود آورده شده است.



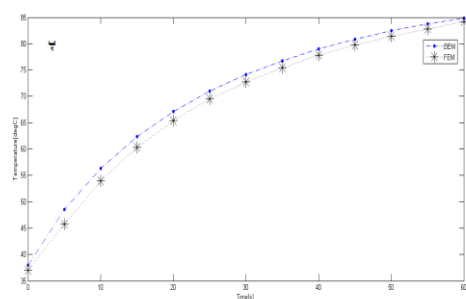
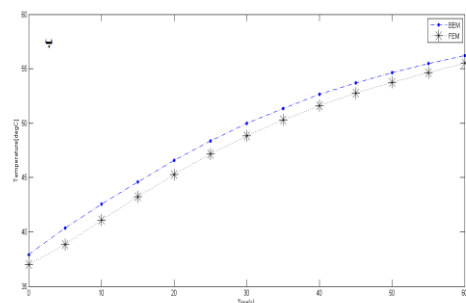
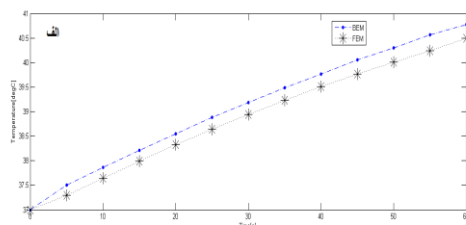
شکل ۲: نحوه قرارگیری نودها در مرز بافت و درون بافت و نقاط آزمون با شماره آن‌ها
جدول ۲: دمای نهایی در نقاط آزمون با دو روش المان محدود و المان مرزی پس از ۶۰ ثانیه برای مدل مربعی

المان مرزی	المان محدود	مدل نقطه آزمون
۳۷/۳۶۸	۳۷/۲۴	نقطه ۱
۴۰/۳۸	۳۹/۹۹	نقطه ۲
۴۰/۴۴	۳۹/۵۴	نقطه ۳
۴۷/۰۵	۴۶/۱۰	نقطه ۴
۵۴/۲۶	۵۳/۸۷	نقطه ۵
۶۲/۱۴	۶۱/۶۴	نقطه ۶
۷۹/۶۵	۷۹/۱۲	نقطه ۷

اختلاف دما بین دو روش در ۷ نقطه آزمون کمتر از ۱ درجه سانتی‌گراد است و این نشان‌دهنده نزدیک بودن حل با این دو روش است. از آنجاکه اختلاف دو روش کم می‌باشد و تعیین دقت این دو روش فقط با آزمایش‌های عملی در محیط‌های کنترل‌شده آزمایشگاهی امکان‌پذیر است، نمی‌توان مشخص کرد که کدام یک از این دو روش جواب دقیق‌تری دارد. در شکل ۴، میزان افزایش دما در بازه‌های مختلف زمانی تا ۶۰ ثانیه برای سه نقطه آزمون ۱، ۴ و ۷ آورده شده است. همان‌طور که از شکل‌ها مشخص است در نقطه ۱ هر چند که اختلاف دمای نهایی حدوداً ۰/۱۲ درجه سانتی‌گراد است، اما اختلاف نتایج دو روش بیشتر دیده می‌شود. دما با روش المان مرزی دوجانبه‌ای با شیب بیشتری افزایش پیدا می‌کند و پیش‌بینی می‌شود اگر زمان تابش بیشتر شود، اختلاف دمای نهایی نیز بیشتر می‌شود. در نقطه ۴ شیب افزایش دما در المان مرزی دوجانبه‌ای در زمان‌های اولیه همچنان بیشتر از المان محدود است ولی با گذشت زمان این افزایش کمتر می‌شود و به سمت همگرایی می‌رود. در نقطه ۷ که نقطه مرکزی می‌باشد، این اختلاف در زمان‌های اولیه به چشم می‌خورد اما با گذشت زمان دو روش تقریباً به یک جواب می‌رسند. یک علت این امر در فاصله بیشتر نقطه ۱ از مرکز بافت است. به علت کم شدن نودهای داخلی در فواصل دورتر از مرکز، اختلاف بین دو روش نیز بیشتر می‌شود.



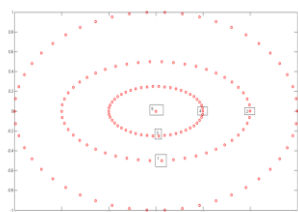
شکل ۳: مقایسه دما در ۳ نقطه آزمون با دو روش المان محدود و المان مرزی برای مدل مربعی: الف) نقطه ۱، ب) نقطه ۴، ج) نقطه ۷



شکل ۵: مقایسه دما در ۳ نقطه آزمون با دو روش المان محدود و المان مرزی برای مدل دایروی: الف) نقطه ۱، ب) نقطه ۴، ج) نقطه ۵

مدل بیضوی

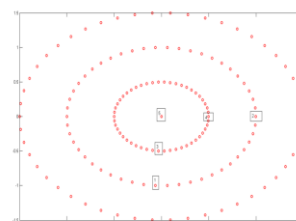
در این مدل هم از پارامترهای شبیه سازی در دو مدل قبلی استفاده شده است. در مدل بیضوی قطر بزرگ ۴ سانتی متر و قطر کوچک ۲ سانتی متر در نظر گرفته شده است. در شکل ۷ نحوه قرارگیری نودها و همچنین ۵ نقطه آزمون مورد نظر درون بافت نشان داده شده است.



شکل ۶: نحوه قرارگیری نودها در مرز بافت و درون بافت و نقاط آزمون با شماره آنها

مدل دایروی

مدل دایروی مورد نظر دایره ای به قطر ۳ سانتی متر است. در شکل ۵ نحوه قرارگیری نودها درون بافت نشان داده شده است. در همین شکل ۵ نقطه آزمون برای بررسی افزایش دما و مقایسه با روش المان محدود نشان داده شده است.



شکل ۴: نحوه قرارگیری نودها در مرز بافت و درون بافت و نقاط آزمون با شماره آنها

در جدول ۳ دمای نهایی در ۵ نقطه آزمون با دو روش المان مرزی دوجانبه ای و المان محدود آورده شده است. در این مدل هم همانند مدل قبلی، اختلاف دما بین دو روش المان محدود و المان مرزی از ۱ درجه سانتی گراد کمتر است.

جدول ۳: دمای نهایی در نقاط آزمون با دو روش المان محدود و المان مرزی پس از ۶۰ ثانیه در مدل دایروی

نقطه آزمون	المان محدود	المان مرزی
نقطه ۱	۴۰/۴۹	۴۰/۸۵
نقطه ۲	۳۸/۷	۳۹/۳۳
نقطه ۳	۵۵/۵۴	۵۶/۱۹
نقطه ۴	۵۷/۵۷	۵۸/۱۸
نقطه ۵	۸۴/۲۲	۸۴/۶۶

در شکل ۶ میزان افزایش دما در بازه های مختلف زمانی تا ۶۰ ثانیه برای سه نقطه آزمون ۱، ۴ و ۵ آورده شده است. مانند مدل قبلی در نقطه ۱ که بیشترین فاصله را از مرکز دارد دما با شیب بیشتری در روش المان مرزی افزایش می یابد و دو مدل در نهایت به یک جواب همگرا نمی شوند. در نقطه ۴ شیب افزایش دمای المان مرزی دوجانبه ای در زمان های اولیه همچنان بیشتر از المان محدود است ولی با گذشت زمان این افزایش کمتر می شود و به سمت همگرا شدن می رود. در نقطه ۵ که نقطه مرکز می باشد این اختلاف در زمان های اولیه به چشم می خورد اما با گذشت زمان دو روش تقریباً به یک جواب می رسند.

جدول ۴: دمای نهایی در نقاط آزمون با دو روش المان محدود و المان مرزی پس از ۶۰ ثانیه برای مدل بیضوی

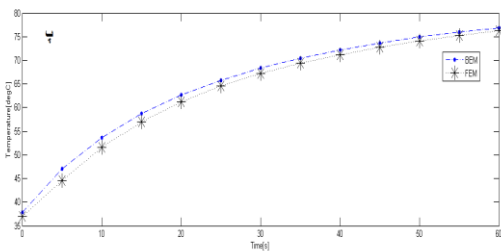
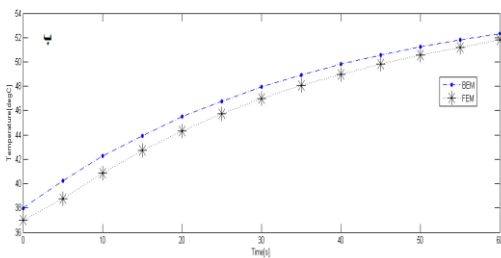
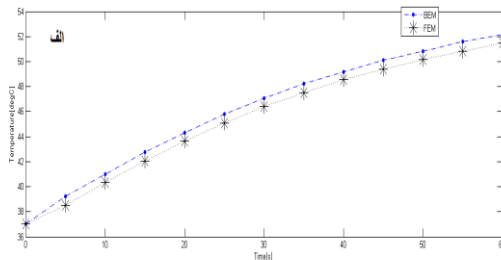
نقطه آزمون	المان محدود	المان مرزی
نقطه ۱	۵۱/۴۸	۵۲/۲۳۴
نقطه ۲	۳۸/۳۰	۳۹/۱۱
نقطه ۳	۶۵/۲۲	۵۶/۷۷
نقطه ۴	۵۱/۸۱	۵۲/۱۳
نقطه ۵	۷۶/۲۸	۷۶/۹۷

در جدول ۴ دمای نهایی در ۵ نقطه آزمون با دو روش المان مرزی و دوجانبه‌ای و المان محدود آورده شده است. مشاهده می‌شود که مانند دو مدل قبلی، روش المان مرزی دمای بیشتری نسبت به المان محدود نشان می‌دهد. اختلاف دمای دو مدل همچنان کمتر از ۱ درجه سانتی‌گراد است و نتایج دو روش با دقت خوبی به هم نزدیک می‌باشند.

در شکل ۸ میزان افزایش دما در بازه‌های مختلف زمانی تا ۶۰ ثانیه برای سه نقطه آزمون ۱، ۴ و ۵ آورده شده است. مانند مدل‌های قبلی در نقطه ۱ دما با شیب بیشتری در روش المان مرزی دوجانبه‌ای افزایش می‌یابد. در این مدل نیز مانند دو مدل قبلی در نقطه ۱ که نودهای درونی در روش المان مرزی کمتر هستند، دو روش اختلاف بیشتری را نشان می‌دهند. در نقطه ۴ شیب افزایش دما المان مرزی دوجانبه‌ای در زمان‌های اولیه همچنان بیشتر از المان محدود است ولی با گذشت زمان این افزایش کمتر می‌شود و به سمت همگرا شدن می‌رود. در نقطه ۵ که نقطه مرکز می‌باشد، این اختلاف در زمان‌های اولیه به چشم می‌خورد اما با گذشت زمان دو روش تقریباً به یک جواب می‌رسند.

تاکنون مقالاتی که روش المان مرزی را برای شبیه‌سازی اثر لیزر بر بافت انتخاب کرده‌اند برای بررسی جواب خود روش دقیقی ارائه نکرده‌اند [۱۱ و ۱۲]. در این مقاله از روش المان محدود برای مقایسه جواب‌ها و دقت روش المان مرزی دوجانبه‌ای استفاده شد. همان‌طور که شبیه‌سازی‌ها نشان داد، دو روش المان محدود و المان مرزی دوجانبه‌ای جواب‌هایی تقریباً یکسان ایجاد می‌کنند. با توجه به اینکه دقت این دو روش فقط با انجام آزمایش‌های عملی در محیط‌های تحت کنترل آزمایشگاهی امکان‌پذیر است، نمی‌توان گفت که کدام روش دقیق‌تر است اما با توجه به اختلاف کم در نتیجه نهایی دو روش می‌توان گفت که هر دو روش المان مرزی و المان محدود به جواب‌های یکسانی می‌رسند. در روش

المان مرزی در زمان‌های ابتدایی تابش، افزایش دما سریع‌تر از روش المان محدود رخ می‌دهد اما با گذشت زمان اختلاف دمای دو روش کاهش می‌یابد و اختلاف نهایی کم است و در عمل تأثیر چندانی روی بافت ندارد. به علاوه روش المان مرزی روشی بسیار سریع است.



شکل ۷: مقایسه دما در ۳ نقطه آزمون با دو روش المان محدود و المان مرزی برای مدل بیضوی: الف) نقطه ۱، ب) نقطه ۴، ج) نقطه ۵

با توجه به آنکه شبیه‌سازی با روش المان محدود با نرم‌افزار تجاری Comsol Multiphysics که نرم‌افزاری قدرتمند است و توسط برنامه‌نویسان حرفه‌ای نوشته شده است، انجام و روش المان مرزی در برنامه Matlab توسط نگارنده این مقاله نوشته شده است، زمان انجام محاسبات تقریباً یکسان بود و این نشان از سرعت بالای روش المان مرزی دارد. همچنین با در نظر گرفتن نودهای بیشتری در روی مرز و درون بافت و همچنین کم کردن گام‌های زمانی در انجام محاسبات، می‌توان دقت این روش را بالاتر برد. از این رو استفاده از روش المان مرزی بخصوص در مدل‌های سه‌بعدی که حجم محاسبات بسیار بیشتر است، توصیه می‌شود. همچنین با توجه به سرعت بالای روش المان مرزی در حل

محدود مقایسه شدند و نشان دادند که دو روش در پایان به جواب تقریباً یکسانی می‌رسند. در نقاط دورتر از مرکز، جایی که نودهای درونی در روش المان مرزی دوجانبه‌ای کمتر است، افزایش دما با این دو روش اختلاف بیشتری دارند و همگرا نمی‌شوند. البته این اختلاف در حدود دهم درجه است و تأثیر زیادی در نتیجه نهایی ندارد. همچنین سرعت در روش المان مرزی دوجانبه‌ای بالا است به‌طوری‌که سرعت این روش که توسط نگارنده این تحقیق برنامه‌نویسی شده است با برنامه I Multiphysics Comso که در زمینه المان محدود برنامه مطرحی می‌باشد، برابری می‌کند. از این رو می‌توان روش المان مرزی را روشی مناسب برای بررسی انتقال گرما در بافت دانست و به‌علت کم کردن یک بُعد مسئله از آن در حل مسائل انتقال گرمای سه‌بعدی استفاده نمود.

معادلات می‌توان در آینده برنامه‌ای تجاری همانند آنچه که امروزه برای روش المان محدود موجود می‌باشد، تولید کرد و استفاده از این روش را در کارهای آتی ساده کرد.

نتیجه‌گیری

در این مقاله اثر لیزر بر بافت در LITT با روش عددی المان مرزی دوجانبه‌ای بررسی شد. برای انتشار نور در بافت از روش مونت کارلو با گام متغیر و جذب تدریجی استفاده گردید. روش المان مرزی دوجانبه‌ای با سه مدل مربعی، دایروی و بیضوی برای بررسی انتقال گرما در بافت دوبعدی استفاده شد. در هر مدل تعدادی نقطه آزمون در نظر گرفته شد و افزایش دما در این نقاط بررسی شدند. نتایج به‌دست‌آمده از این روش با روش المان

References

1. Niemz MH. Laser-Tissue Interaction: Fundamentals and Applications. Springer-verlag, Berlin, Heidelberg 2003.
2. Baxter GD. Therapeutic Lasers, Theory and Practice. 1st ed., Churchill Living Stone, 1994.
3. Muller GJ, Roggan A. Laser-Induced Interstitial Thermo-therapy. The International Society for Optical Engineering, Bellingham, Washington, 1995.
4. Jiang SH, Zhang X. Effects of dynamic changes of tissue properties during laser-induced interstitial thermo-therapy (LITT). Laser in Medical Science 2005; 19: 197-202.
5. Jiang SH, Zhang X. Dynamic modeling of photothermal interactions for laser-induced interstitial thermo-therapy: parameter sensitivity analysis. Lasers in Medical Science 2005; 20: 122-31.
6. Vogl TJ, Straub R, Zangos S, Mack MG, Eichler K, Bottger M. Laser-induced thermo-therapy of malignant liver tumors: general principals, equipments, procedures, side effects, complications and results. European Journal of Ultrasound, 2001; 13: 117-27.
7. Vogl TJ, Straub R, Zangos S, Mack MG, Eichler K, Nabil M. Effect of laser-induced thermo-therapy of liver metastases. Expert Rev, Anticancer Ther. 2006; 6: 769-74.
8. Vogl TJ, Straub R, Zangos S, Mack MG. MR-guided laser-induced thermo-therapy(LITT) of liver tumours: experimental and clinical data. International Journal of Hyperthermia 2004; 20(7): 713-24.
9. Germer CT, Isbert CM, Albrecht D, Ritz JP, Roggan A, Wolf KJ. Laser-induced thermo-therapy for the treatment of liver metastasis. Surgical Endoscopy, Springer-Verlag 1998; 12: 1317-25.
10. Lie J, Xu LX. Boundary information based diagnostics on the thermal states of biological bodies. International Journal of Heat and Mass Transfer 2000; 43: 2827-39.
11. Zhou J, Chen JK, Zhang Y. Simulation of laser-induced thermo-therapy using a Dual-Reciprocity Boundary Element Model with dynamic tissue properties. IEEE Transaction on Biomedical Engineering 2010; 57(2).
12. Zhou J, Zhang Y, Chen JK. A dual reciprocity boundary element method for photothermal interactions in laser-

- induced thermotherapy. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 2008; 53: 3869–81.
13. Toutip W, Kaennakam S, Kananthai A. The dual reciprocity boundary element method for two-dimensional Burgers' equations using MATLAB. Khon Kaen University, Thailand, 2010.
14. Desilva SJ, Chan CL. Coupled boundary element method and finite difference method for the heat conduction in laser processing. *Applied Mathematical Modeling* 2008; 32: 2429–58.
15. Chan CL. Boundary element method analysis for bioheat transfer equation. *Transactions of the ASME* 1992; 114.
16. Nardini D, Brebbia CA. A new approach of free vibration analysis using boundary elements. *App. Math. Modeling* 1983; 7.
17. Cui X. Discontinuous finite/boundary element method for radiative heat transfer with application in laser cancer therapy. Doctoral Thesis in Washington State University, 2005.
18. Partridge PW, Brebbia CA, Wrobel LC. *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*. London, U.K.: Elsevier, 1992.
19. Jacques SL, Wang L. Monte Carlo Modeling of light transport in multi-layered tissue in standard C. Oregon Medical Laser Center, 1998.
20. Prahl S. Light transport in tissue. Ph.d Thesis in the university of Texas at Austin, 1998.
21. Kolinko VG, DelMul FFM, Greve J, Priezhev AV. On refraction in Monte Carlo simulations of light transport through biological tissue. *Med. Biol. Eng. Comp* 1997; 35: 287-8.
22. Wang L, Jacques SL. MCML-Monte Carlo modeling of light transport in multi-layered tissues. *Computer Methods and Programs in Biomedicine* 1995; 47: 131-46.
23. Jacques SL. Modeling tissue optics using Monte Carlo modeling: a tutorial. *Proc. Of SPIE*, 2008; 6854.
24. Cui X. Discontinuous finite/boundary element method for radiative heat transfer with application in laser cancer therapy. Doctoral Thesis in Washington State University, 2005.
25. Toutip W. Study on the Dual Reciprocity Boundary Element Method. Master Thesis of University of Hertfordshire, 1999.
26. Tanaka M, Matsumoto T, Takakuwa S. Dual reciprocity BEM for time-stepping approach to the transient heat conduction problem in nonlinear materials. *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.* 2006; 195: 4953–61.
27. Drozdek J, Majchrzak E. Numerical Solution of bioheat transfer equation by means of the dual reciprocity BEM. Scientific Research of the Institute of Mathematics and Computer Science, 2007.
28. Majchrzak E, Drozdek J, Ladyaga E, Paruch M. Computer implementation of the dual reciprocity BEM for 2D Poisson's equation. Scientific Research of the Institute of Mathematics and Computer Science, 2006.
29. Nardini D, Brebbia CA. A new approach of free vibration analysis using boundary elements. *App. Math. Modeling* 1983; 7.
30. Sutradhar A, Paulino GH. The simple boundary element method for transient heat conduction in functionally graded materials. *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.* 2004; 193: 4531–9.
31. COMSOLAB Software, Sweden, www.comsol.com